∽ LA RÉUNION, SÉRIE S, 21 JUIN 2011 ∾

Exercice 1 - commun - 4 points

1. Le plan $\mathscr{P}$ et la droite $\mathscr{D}$ n'ont aucun point commun.

2. Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants suivant une droite de vecteur directeur $-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

3. L'ensemble des points M de l'espace qui sont équidisdants des points A et B est le plan d'équation $-4x+2y+5z-\dfrac{5}{2}=0$.

4. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right\|=5$ est une sphère dont le centre a pour coordonnées $\left(-5;5;\dfrac{7}{2}\right)$.

➠ *Pour voir les justifications* (cliquer ici)

Exercice 2 - commun - 5 points

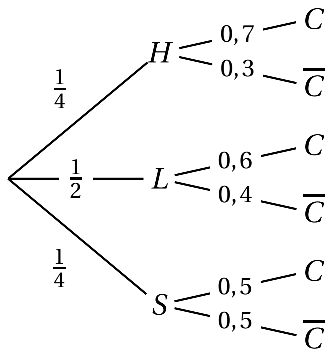
1. Les bulletins sont indiscernables au toucher, les tirages sont donc équiprobables et la probabilité d'un événement est le quotient du nombre de tirages qui lui sont favorables par le nombre de tirages possibles :

- Le nombre de tirages de 4 bulletins choisis simultanément parmi 10 est
$$\binom{10}{4}=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$$
- L'événement A est réalisé lorsque les 4 bulletins sont choisis parmi les 4 portant sur l'histoire ;
le nombre de tirages favorables à l'événement A est
$$\binom{4}{4}=1$$
- L'événement $\overline{B}$ est réalisé lorsque les 4 bulletins sont choisis parmi les 8 ne portant pas sur le sport ;
le nombre de tirages favorables à l'événement $\overline{B}$ est
$$\binom{8}{4}=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$$

Ainsi :

$$\boxed{P(A)=\frac{1}{210}}\quad\text{et}\quad\boxed{P(B)=1-P\left(\overline{B}\right)=1-\frac{70}{210}=\frac{2}{3}}$$

2. a.



b. Les événements H, L et S forment un système complet d'événements, alors (formule des probabilités totales) :

$$\begin{array}{lclclcl}
P(C) & = & P(C \cap H) & + & P(C \cap L) & + & P(C \cap S) \\
P(C) & = & P(H) \times P_H(C) & + & P(L) \times P_L(C) & + & P(S) \times P_S(C) \\
P(C) & = & \dfrac{1}{4} \times 0,7 & + & \dfrac{1}{2} \times 0,6 & + & \dfrac{1}{4} \times 0,5
\end{array}$$

$$\boxed{P(C) = 0,6}$$

c. On demande de calculer la probabilité conditionnelle $P_C(S)$:

$$\boxed{P_C(S) = \frac{P(S \cap C)}{P(C)} = \frac{P(S) \times P_S(C)}{P(C)} = \frac{0,5 \times 0,25}{0,6} = \frac{5}{24}}$$

3. a. Chaque question constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,7$ (épreuve à deux issues : le candidat répond correctement à la question — succès — avec la probabilité $p = 0,7$ ou bien il ne répond pas correctement à la question avec la probabilité $1 - p = 0,3$).

On répète $n = 10$ fois, de manière indépendante, une telle épreuve de même paramètre $p = 0,7$, alors la variable aléatoire X égale au nombre de « succès » suit la loi binomiale de paramètres 10 et 0,7, c'est-à-dire

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \{0;1;2;\ldots;10\}, \quad P(\{X = k\}) = \binom{10}{k} \times 0,7^k \times 0,3^{10-k}}$$

b. $P(\{X \geqslant 9\}) = P(\{X = 9\}) + P(\{X = 10\})$

$P(\{X \geqslant 9\}) = \binom{10}{9} \times 0,7^9 \times 0,3 + \binom{10}{10} \times 0,7^{10} = \ldots$

$$\boxed{P(\{X \geqslant 9\}) \approx 0,15 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}}$$

Exercice 3 - commun - 6 points

Partie A

1. **a.** La fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne prend que des valeurs strictement positives, alors la fonction $x \longmapsto e^{2x}+1$ est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\dfrac{4e^x\left(e^{2x}+1\right)-2e^{2x}\times 4e^x}{\left(e^{2x}+1\right)^2} = -\dfrac{4e^x\left(1-e^{2x}\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\quad f'(x) = \dfrac{4e^x\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}}$$

b. Pour tout réel x,

$$\frac{4e^x}{\left(e^{2x}+1\right)^2} > 0$$

alors $f'(x)$ est du même signe que $e^{2x}-1$.

Puisque la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x>0$, on a $2x>0$, alors $e^{2x} > e^0$ soit $e^{2x}-1>0$.

$\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x)>0$ et $f'(0)=0$, alors

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [0;+\infty[}$$

2. f est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = 1-\frac{4e^{-x}}{e^{-2x}+1} = 1-\frac{4e^{-x}}{e^{-2x}\left(1+e^{2x}\right)} = 1-\frac{4e^x}{1+e^{2x}} = f(x)$$

Ainsi la fonction f est paire et, graphiquement :

$$\boxed{\text{la courbe } \mathscr{C} \text{ est symétrique par rapport à la droite d'équation } x=0}$$

3. **a.** Les coordonnées du point A sont $(a, 0)$ avec $a>0$ et $A \in \mathscr{C}$, alors

$f(a)=0 \Longrightarrow 1-\dfrac{4e^a}{e^{2a}+1} = \dfrac{e^{2a}-4e^a+1}{e^{2a}+1} = 0 \Longrightarrow \left(e^a\right)^2-4e^a+1=0$

Si on pose $c=e^a$, alors

$$\boxed{c \text{ est une solution de l'équation } x^2-4x+1=0}$$

On résout l'équation $x^2-4x+1=0$; elle admet deux solutions réelles positives $2-\sqrt{3}$ et $2+\sqrt{3}$, alors $a \in \left\{\ln\left(2-\sqrt{3}\right), \ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right\}$.

Puisque $2-\sqrt{3} \in]0;1[$, alors $\ln\left(2-\sqrt{3}\right)<0$ et, a étant positif :

$$\boxed{a = \ln\left(2+\sqrt{3}\right)}$$

b. f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et s'annule en $a=\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ alors, en utilisant la parité de f, on en déduit :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \bullet\ f(x)>0 & \text{si } x \in]-\infty;-a[\cup]a;+\infty[\,; \\ \bullet\ f(x)<0 & \text{si } x \in]-a;a[\,; \\ \bullet\ f(-a)=f(a)=0. & \end{array}}$$

Partie B

1. On reconnaît, sous forme intégrale, l'expression de la primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 de la fonction f, alors F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$. Les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$ se déduisent alors du signe de $f(x)$:

- F est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,-a]$ et sur $[a\,;\,+\infty[$;
- F est strictement décroissante sur $[-a\,;\,a]$.

2. f étant continue et négative sur $[0\,;\,a]$, $F(a) = \displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^a \left|f(t)\right|\mathrm{d}t$ est l'opposé de l'aire, en unités d'aire, du domaine plan compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$. Ce domaine est contenu dans un rectangle dont les dimensions sont $\left|f(0)\right| = 1$ et a, alors $0 \leqslant -F(a) \leqslant 1 \times a$, d'où :

$$\boxed{-a \leqslant F(a) \leqslant 0}$$

3. a. Soit $t \in [0, +\infty[$, $\quad f(t) = 1 - \dfrac{4\mathrm{e}^{t}}{\mathrm{e}^{2t}\left(1+\mathrm{e}^{-2t}\right)} = 1 - 4\mathrm{e}^{-t} \times \left(\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-2t}}\right)$.

On est donc amené à comparer $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-2t}}$ avec 1 ;

Soit $t \geqslant 0$, on a : $\mathrm{e}^{-2t} > 0$, puis : $\mathrm{e}^{-2t} + 1 > 1$,
alors, par stricte décroissance de la fonction « inverse » sur $]0;+\infty[$,

$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2t}} < 1$$

En multipliant chaque membre par $-4\mathrm{e}^{-t} < 0$:

$$\frac{-4\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^{-2t}} > -4\mathrm{e}^{-t}$$

Finalement, en ajoutant 1 :

$$\boxed{\text{Pour tout réel positif } t, \quad f(t) \geqslant 1 - 4\mathrm{e}^{-t}}$$

b. Soit $x \geqslant 0$.
Puisque l'intégrale entre des bornes croissantes « conserve l'ordre », alors (d'après la question précédente) :

$$\underbrace{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}_{F(x)} \geqslant \underbrace{\int_0^x \left(1 - 4\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t}_{\left[t+4\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x}$$

$\left[t + 4\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x = x + 4\mathrm{e}^{-x} - 4 \geqslant x - 4$, car $\mathrm{e}^{-x} > 0$. On a bien :

$$\boxed{\text{pour tout réel positif } x, \quad F(x) \geqslant x - 4}$$

Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x - 4 = +\infty$, par comparaison :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty}$$

4. Puisque la fonction f est paire, on peut penser que sa primitive F qui s'annule en 0 est impaire, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(-x) = -F(x) \iff \forall x \in \mathbb{R},\ F(-x) + F(x) = 0$$

Pour cela, on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(-x) + F(x)$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est définie, pour tout réel x, par $-f(-x) + f(x) = 0$ car f est paire, alors :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(-x) + F(x) = F(-0) + F(0) = 0$. Alors F est impaire.

Par imparité :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\lim_{x\to+\infty} F(x) = -\infty}$$

Exercice 4 - non spécialité - 5 points

Partie A - Restitution organisée de connaissances

- Une distance est la traduction géométrique du module d'un nombre complexe.
  Avec les notations de l'énoncé, on a : $AB = |b-a|$ et $AC = |c-a|$.
  Si $A \neq B$, l'affixe c du point C, image de B par une rotation de centre A vérifie :
  $$1 = \frac{AC}{AB} = \frac{|c-a|}{|b-a|} = \left|\frac{c-a}{b-a}\right|$$
- Un angle orienté est la traduction géométrique de l'argument d'un nombre complexe. En utilisant la relation de Chasles :
  $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{AC}\right) - \left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(c-a) - \arg(b-a) + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.
  La différence des arguments est un argument du quotient, si $A \neq B$, l'affixe c du point C, image de B par la rotation de centre A et d'angle θ, vérifie :
  $$\theta = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) + 2k\pi,\ \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

Par conséquent, si $A \neq B$, l'affixe c du point C, image de B par la rotation de centre A et d'angle θ, vérifie :

$$\frac{c-a}{b-a} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad \text{soit} \quad c-a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(b-a)$$

La dernière égalité reste valable si $a = b$, d'où l'écriture complexe de cette rotation :

$$\boxed{c = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(b-a) + a}$$

Partie B

1. $2z^2 - 6z + 9 = 0$ est une équation du second degré dans $\mathbb{C}$ à coefficients réels dont le discrimant $\Delta = -36 = (6\mathrm{i})^2$ est négatif, alors cette équation possède deux solutions complexes conjuguées :

$$\boxed{z_1 = \frac{6-6\mathrm{i}}{4} = \frac{3}{2}(1-\mathrm{i})} \quad \text{et} \quad \boxed{z_2 = \frac{3}{2}(1+\mathrm{i})}$$

2. Figure à la fin de l'exercice.

3. S est le symétrique du point R par rapport au point Q signifie que Q est le milieu du segment $[RS]$, c'est-à-dire : $z_Q = \dfrac{1}{2}(z_R + z_S)$ soit :

$$z_S = 2z_Q - z_R = 3(1-\mathrm{i}) - \left(-2\mathrm{i}\sqrt{3}\right) = 3 + \mathrm{i}\left(2\sqrt{3} - 3\right)$$

4. L'écriture complexe de la rotation r est $z' = \mathrm{i}z$, alors :

$$\boxed{z_A = \mathrm{i}z_R = 2\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \boxed{z_C = \mathrm{i}z_S = 3\mathrm{i} - \left(2\sqrt{3} - 3\right)}$$

5. L'écriture complexe de la translation de vecteur $3\vec{v}$ est $z' = z + 3\mathrm{i}$, alors :

$$\boxed{z_B = 3 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \boxed{z_D = \mathrm{i}\left(3 - 2\sqrt{3}\right)}$$

6. a. On calcule $z_B - z_P = 3 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} - \dfrac{3}{2}(1+\mathrm{i}) = \dfrac{3}{2} + \mathrm{i}\left(2\sqrt{3} - \dfrac{3}{2}\right)$

puis,
$$\begin{aligned} z_C - z_P &= 3\mathrm{i} - \left(2\sqrt{3} - 3\right) - \frac{3}{2}(1+\mathrm{i}) \\ &= \frac{3}{2}\mathrm{i} - \left(2\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right) \\ &= \mathrm{i}\left(\frac{3}{2} + \mathrm{i}\left(2\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)\right) \\ &= \mathrm{i}(z_B - z_P) \end{aligned}$$

On a bien

$$\boxed{\frac{z_C - z_P}{z_B - z_P} = \mathrm{i}}$$

b. • D'après la **partie A**, le résultat précédent signifie que le point C est l'image du point B par la rotation de centre P et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, alors :

<u>le triangle PBC est rectangle et isocèle en P.</u>

• On calcule l'affixe du milieu du segment $[AC]$:

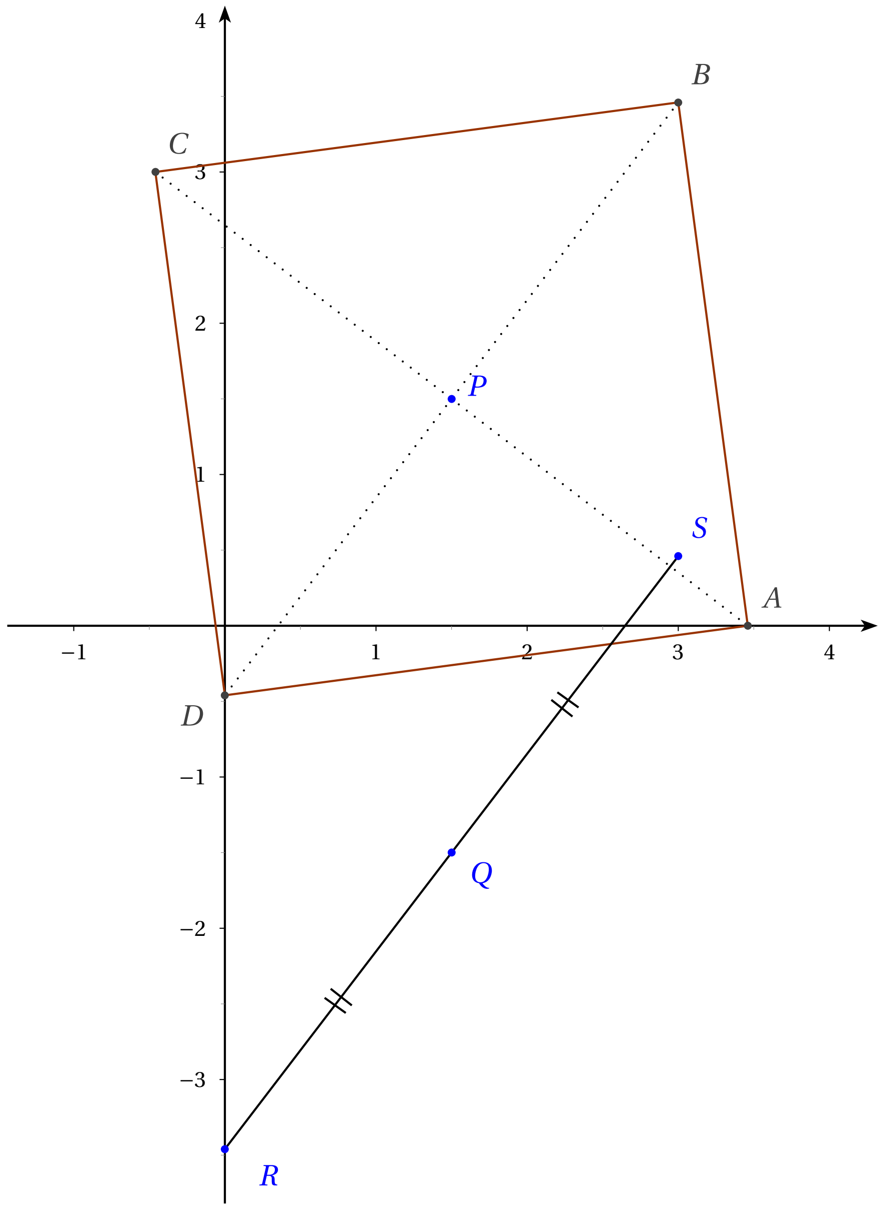
$$\underline{\frac{1}{2}(z_A + z_C) = \frac{1}{2}(3\mathrm{i} + 3) = \frac{3}{2}(1+\mathrm{i}) = z_P.}$$

• On calcule l'affixe du milieu du segment $[BD]$:

$$\underline{\frac{1}{2}(z_B + z_D) = \frac{1}{2}(3 + 3\mathrm{i}) = z_P.}$$

Finalement les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du quadrilatère $ABCD$ sont de même longueur, perpendiculaires et se coupent en leur milieu P, alors :

$$\boxed{ABCD \text{ est un carré.}}$$


4
3
2
1
−1
−2
−3
−1
1
2
3
4
B
C
P
S
A
D
Q
R

Exercice 4 - spécialité - 5 points

Partie A - Restitution organisée de connaissances

- Une distance est la traduction géométrique du module d'un nombre complexe.
  Avec les notations de l'énoncé, on a : $AB = |b-a|$ et $AC = |c-a|$.
  Si $A \neq B$, l'affixe c du point C, image de B par une similitude directe de centre A et de rapport k ($k > 0$), vérifie :
  $$k = \frac{AC}{AB} = \frac{|c-a|}{|b-a|} = \left|\frac{c-a}{b-a}\right|$$
- Un angle orienté est la traduction géométrique de l'argument d'un nombre complexe. En utilisant la relation de Chasles :
  $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{AC}\right) - \left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(c-a) - \arg(b-a) + 2n\pi$, où $n \in \mathbb{Z}$.
  La différence des arguments est un argument du quotient, si $A \neq B$, l'affixe c du point C, image de B par une similitude directe de centre A et d'angle θ, vérifie :
  $$\theta = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) + 2n\pi, \text{ où } n \in \mathbb{Z}$$

Par conséquent, si $A \neq B$, l'affixe c du point C, image de B par la similitude directe de centre A, de rapport k ($k > 0$) et d'angle θ, vérifie :
$$\frac{c-a}{b-a} = k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad \text{soit} \quad c - a = k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(b-a)$$
La dernière égalité reste valable si $a = b$, d'où l'écriture complexe de cette similitude directe :
$$\boxed{c = k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(b-a) + a}$$

Partie B

1. a. On vérifie : $3 \times (-1) - 2 \times (-2) = -3 + 4 = 1$, alors
$$\boxed{\text{le couple } (-1, -2) \text{ est une solution de } (E)}$$

b. • **Condition nécessaire :**
Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs tel que : $3x - 2y = 1$
sachant que : $3 \times (-1) - 2 \times (-2) = 1$
par différence membre à membre : $3 \times (x+1) - 2 \times (y+2) = 0$
soit : $3(x+1) = 2(y+2)$
Ainsi : 2 divise le produit $3(x+1)$ et 2 est premier avec 3,
alors (théorème de Gauss) : 2 divise $x+1$,
alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + 1 = 2k$ et $3 \times \cancel{2}k = \cancel{2}(y+2)$,
alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2k - 1$ et $y = 3k - 2$.
On a ainsi démontré que toute solution de (E) est nécessairement de la forme $(2k-1, 3k-2)$, où $k \in \mathbb{Z}$.

• **Condition suffisante :**
Soit $k \in \mathbb{Z}$, on a : $3(2k-1) - 2(3k-2) = -3 + \cancel{6k} + 4 - \cancel{6k} = 1$

• **Conclusion :**
L'ensemble des couples d'entiers relatifs vérifiant l'équation (E) est
$$\boxed{\text{l'ensemble des couples } (2k-1, 3k-2), \text{ où } k \in \mathbb{Z}}$$

2. a. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Puisque $2(k-3)+4 = 2k-2$, les coordonnées $(k-3, 2k-2)$ du point A_k vérifient l'équation $y = 2x+4$ de la droite d, alors

$$\boxed{A_k \in d}$$

b. Les seuls points de d' à coordonnées entières sont les points dont les coordonnées sont les couples d'entiers relatifs vérifiant l'équation de d' : $3x-2y=1$.
On reconnaît l'équation (E) alors, d'après **B. 1. b.**, ce sont les points $B_{k'}$ de coordonnées $(2k'-1, 3k'-2)$, où $k' \in \mathbb{Z}$.

3. a. Soient k et k' deux entiers relatifs.

$$\begin{aligned} A_k = B_{k'} &\iff \begin{cases} k-3 &= 2k'-1 \\ 2k-2 &= 3k'-2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} k &= 2k'+2 \\ 2(2k'+2)-2 &= 3k'-2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} k &= 2k'+2 \\ k' &= -4 \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{A_{-6} = B_{-4}}$$

b. $[A_kB_{k'}]$ est parallèle à l'axe des abscisses si, et seulement si, A_k et $B_{k'}$ ont la même ordonnée et $A_k \neq B_{k'}$, c'est-à-dire :

$$2k-2 = 3k'-2 \quad \text{et} \quad k-3 \neq 2k'-1$$

soit

$$2k = 3k' \quad \text{et} \quad k \neq 2k'+2$$

si, et seulement si,

$$\boxed{k = 3q \quad \text{et} \quad k' = 2q \quad \text{où} \quad q \in \mathbb{Z} \text{ et } q \neq -2}$$

c. $\overrightarrow{A_{3q}B_{2q}} = 4\vec{u} \iff (4q-1)-(3q-3) = 4 \iff q+2 = 4 \iff q = 2$

4. a. D'après la **Partie A**, l'écriture complexe de f est $z' = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(z-\omega)+\omega$ soit :

$$\boxed{z' = -\frac{\mathrm{i}}{2}z + \omega\left(1+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)}$$

b. On commence par calculer l'affixe z_H du point H :

$$z_H = \frac{1}{2}\left(z_{A_6} + z_{B_4}\right) = \frac{1}{2}(3+7+\mathrm{i}(10+10)) = 5+10\mathrm{i}.$$

D'après la question précédente, l'affixe de l'image du point H (en fonction de ω) est :

$$-\frac{\mathrm{i}}{2}(5+10\mathrm{i}) + \omega\left(1+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)$$

Ainsi,

$f(H)=O \iff -\dfrac{5}{2}\mathrm{i}(1+2\mathrm{i})+\omega\left(\dfrac{2+\mathrm{i}}{2}\right)=0$

$f(H)=O \iff \omega=\dfrac{5\mathrm{i}(1+2\mathrm{i})}{2+\mathrm{i}}=\dfrac{5(\mathrm{i}-2)}{2+\mathrm{i}}\times\dfrac{2-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\dfrac{\cancel{5}(-3+4\mathrm{i})}{\cancel{5}}$

Finalement

$$\boxed{f(H)=O \iff \omega=-3+4\mathrm{i}}$$

Justification des réponses au Q.C.M. (exercice 1)

1. Il s'agit d'un problème d'incidence entre une droite et un plan dans l'espace. Pour cela on cherche l'ensemble des points d'intersection de la droite (dont on connaît une représentation paramétrique) et du plan (dont on connaît une équation cartésienne). On résout le système

$$\left\{\begin{array}{l} x=-8+2t \\ y=7-t \\ z=6+t \\ 2x+3y-z+4=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=-8+2t \\ y=7-t \\ z=6+t \\ 2(-8+2t)+3(7-t)-(6+t)+4=0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -8+2t \\ y & = & 7-t \\ z & = & 6+t \\ 3 & = & 0 \quad \text{Impossible !} \end{array}\right.$$

Ce système n'a pas de solution :

$$\boxed{\text{la droite et le plan n'ont aucun point en commun}}$$

2. C'est encore un problème d'incidence, cette fois entre deux plans dans l'espace dont on connaît pour chacun d'eux une équation cartésienne. On résout un système de deux équations linéaires à trois inconnues en choisissant, par exemple, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$, comme paramètre :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 4y & - & 3z & = & -4 & L_1 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & -4 & L_2 \\ & & & & z & = & t & L_3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & 4y & = & -4+3t & L_1 \\ & - & 5y & = & 4-5t & L_2 \longleftarrow L_2-2L_1 \\ & & z & = & t & L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -\dfrac{4}{5}-t \\ y & = & -\dfrac{4}{5}+t \quad , \quad t\in\mathbb{R} \\ z & = & t \end{array}\right.$$

On reconnaît une représentation paramétrique

$$\boxed{\text{d'une droite de vecteur directeur } -\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}$$

3. L'ensemble des points M de l'espace qui sont équidistants des points A et B est le plan médiateur du segment $[AB]$, c'est-à-dire le plan de vecteur normal $\overrightarrow{AB}(-4;2;5)$ et passant par le milieu $I\left(-1;3;-\dfrac{3}{2}\right)$ du segment $[AB]$. On peut alors déterminer une équation cartésienne de ce plan ou bien tester les coordonnées de I en calculant

$$-4x_I+2y_I+5z_I=4+6-\frac{15}{2}=\frac{5}{2}.$$

Finalement, l'ensemble cherché est

$$\boxed{\text{le plan d'équation } \ -4x+2y+5z-\frac{5}{2}=0}$$

4. Soit G le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, -3)$, alors pour tout point M de l'espace, $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = (1-3)\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{GM}$, alors

$$\left\|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right\| = 5 \iff 2GM = 5 \iff GM = \frac{5}{2}.$$

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right\| = 5$ est

$$\boxed{\text{une sphère de centre } G \text{ dont l'abscisse est } \frac{1}{1-3}(x_A - 3x_B) = -5}$$

retour